Concours ESIGETEL - Session juin 1994
Série Générale
MATHÉMATIQUES II
ALGÈBRE - GÉOMÉTRIE
Durée 4 heures
* * *

Correction

Exercice de géométrie

1. Soient λ et μ des réels tels que $\lambda \neq \mu$. Un point $(x,y) \in (\mathscr{C}_\lambda) \cap (\mathscr{C}_\mu)$ si, et seulement si, $x^2+y^2+2\lambda xy-4x+2y = x^2+y^2+2\mu xy-4x+2y = 0$, donc par soustraction $2(\lambda-\mu)xy = 0$ et donc $xy = 0$.
Réciproquement, $(x,0) \in (\mathscr{C}_\lambda)$ si, et seulement si, $x^2-4x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 4$. De même, $(0,y) \in \mathscr{C}_\lambda$ si, et seulement si, $y^2+2y = 0$, c'est-à-dire $y = 0$ ou $y = -2$.
Ainsi l'ensemble des points communs à toutes les courbes est $\{(0,0),(0,-2),(4,0)\}$.

2. On considère un repère $R_\theta = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ obtenu par rotation d'angle θ de $\mathbb{R}$, on note (X,Y) les coordonnées de M dans ce repère. Cherchons $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour que le terme en XY de l'équation $(\mathscr{C}_\lambda)$ dans ce repère soit nul. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \\ y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \end{array}\right. \tag{1}$$

Le terme en XY est donc égal à $-2\cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\lambda\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 2\lambda\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$. On choisit donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ pour avoir un terme en XY nul. Les formules de changement de repère deviennent alors

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{array}\right. \tag{2}$$

et l'équation de $\mathscr{C}_\lambda$ est

$$\frac{1}{2}(X-Y)^2 + \frac{1}{2}(X+Y)^2 + 2\lambda \times \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) - 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) + 2\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) = 0$$

soit

$$(1+\lambda)X^2 + (1-\lambda)Y^2 - \sqrt{2}X + 3\sqrt{2}Y = 0$$

• Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on a $1-\lambda > 0$, l'équation ressemble à une équation réduite d'ellipse.
• Pour $\lambda = 1$, l'équation réduite s'écrit $2X^2 - \sqrt{2}X + 3\sqrt{2}Y = 0$, c'est bien l'équation réduite d'une parabole.
• Pour $\lambda = \frac{3}{2}$, l'équation réduite s'écrit $\frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - \sqrt{2}X + 3\sqrt{2}Y = 0$, c'est bien l'équation réduite d'une hyperbole.

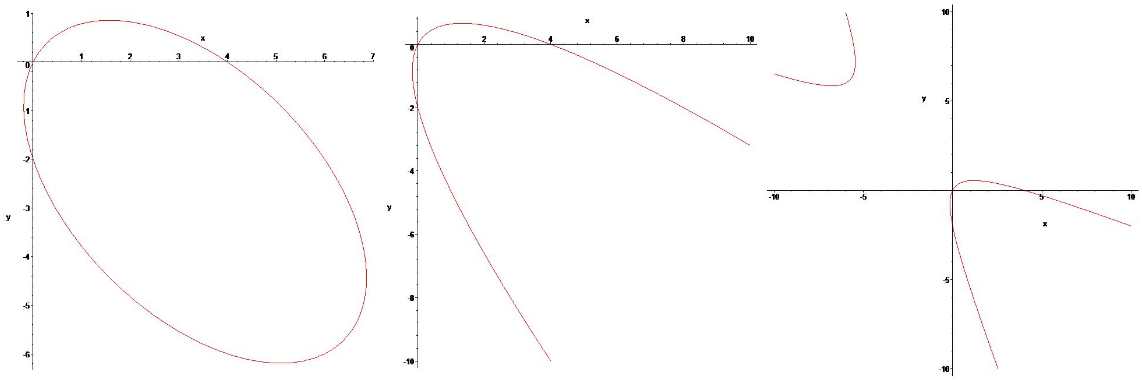

FIGURE 1 – Courbes $\mathscr{C}_\lambda$, $\lambda \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$

3. (a) Posons $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\lambda xy - 4x + 2y$. f définit une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus $f(0,-2) = 0$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2\lambda x + 2$, soit $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicite au voisinage de $(0,-2)$. Il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0, un intervalle J de $\mathbb{R}$ contenant -2 et une fonction $\varphi : I \mapsto J$ tel que, pour tout $(x,y) \in I \times J$.

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

Pour déterminer les dérivées $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$, on dérive successivement la relation $f(x,\varphi(x)) = 0$ par rapport à la variable x. On obtient, pour tout $x \in I$:

$$2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) + 2\lambda\varphi(x) + 2\lambda x\varphi'(x) - 4 + 2\varphi'(x) = 0$$

et

$$2 + 2\varphi'(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) + 4\lambda\varphi'(x) + 2\lambda x\varphi''(x) + 2\varphi''(x) = 0$$

D'où, une autre fois, $\varphi'(0) = -2\lambda - 2$ et $\varphi''(0) = 4\lambda + 5$.

(b) Le rayon de courbure au point $A(0,-2)$ est donné par : $R = \dfrac{\left(1+\varphi'(0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\varphi''(0)} = \dfrac{\left(5+4\lambda+4\lambda^2\right)^{\frac{3}{2}}}{5+4\lambda}$ et ceci pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-5}{4}\right\}$.

(c) Le vecteur normé tangent à $\mathscr{C}_\lambda$ au point $A(0,-2)$ est $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\|(0,\varphi'(0))\|}(0,\varphi'(0)) = \dfrac{-1}{|1+\lambda|}(0, 1+\lambda)$. Le centre de courbure en $A(0,-2)$ est $\Omega\left(\dfrac{1+(2\lambda+2)^2}{4\lambda+5}(2\lambda+2), -2 + \dfrac{1+(2\lambda+2)^2}{4\lambda+5}\right)$.

Problème d'algèbre

1. (a) Il est clair que f_u est un endomorphisme de E. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$(f_u(x)|y) = ((u|x)u|y) = (x|f_u(y)),$$

de plus pour tout $x \in E$,

$$(x|f_u(x)) = (x|(u|x)u) = (u|x)^2 \geq 0,$$

donc $f_u \in \mathscr{S}^+(E)$.

(b) On a $\mathrm{Im}(f_u) \subset \mathbb{R}u$ et $f_u(u) = \|u\|^2 \neq 0$, donc $\mathrm{Im}(f_u) = \mathbb{R}u = \mathrm{Vect}(u)$ et par conséquent $\mathrm{rg}(f_u) = 1$.

(c) Si $\|u\| = 1$, f_u est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$.

(d) Notons $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de f_u dans cette base $\mathscr{B}$. Posons $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{ij} = (e_i|f_u(e_j)) = u_i u_j$, c'est-à-dire $M = U{}^tU$.

2. Si $uu^* = uv^*$, alors on aura pour tout $x \in E$, $(u|u)u = (v|u)v$, donc v et u sont colinéaires, soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$, alors la condition $uu^*(u) = vv^*(u)$ entraine $\lambda^2 = 1$. Ainsi $vv^* = uu^*$ si, et seulement si, $v = u$ où $v = -u$.

3. (a) f étant symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormale $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de E (d'après le théorème spectral). Soient $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, les valeurs propres de f telles que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(a_i) = \lambda a_i$. Posons $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i a_i^*$, alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$g(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i a_i^*(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i|a_j)a_i = \lambda_j a_j.$$

D'où $f = g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i a_i^*$.

(b) Si toutes les valeurs propres de f sont positives, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \in E$, on a $(x|f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$.

Si, pour tout $x \in E$, on a $(x|f(x) \geq 0$. Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé. Comme $f(x) = \lambda x$, on en déduit que $\lambda(x|x) \geq 0$. Comme $(x|x) \geq 0$, on a $\lambda \geq 0$.
D'où $f \in \mathscr{S}^+(E)$ si, et seulement si, $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

4. Si $f = 0$, alors pour tout $x \in E$, $(x|f(x)) = 0$. Inversement, on sait que

$$2(f(x)|y) = (f(x+y)|x+y) - (f(x)|x) - (f(y)|y),$$

ainsi si $(f(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$, alors on aura $(f(x)|y) = 0$ pour tout $y \in E$ et donc f est nul.

5. Si $f(x) = 0$, $(x|f(x)) = 0$. D'autre part si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i a_i$ (d'après la question 3.), alors $(x|f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = 0$ entraîne $\lambda_i x_i^2 = 0$ et donc $\lambda_i x_i = 0$ ou $x_i = 0$ ce qui montre que $f(x) = 0$.

6. Si $f \in \mathscr{S}^*(E)$, alors $\lambda_i \geq 0$. Posons donc $u_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$, alors on vérifie facilement que $f = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*$.

7. (a) Par définition si $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$, alors $\|f(x)\| \leq \|\!|f|\!\|$. Maintenant si $x \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{x}{\|x\|}$ est de norme 1 et donc $\|f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\| \leq \|\!|f|\!\|$ et par conséquent $\|f(x)\| \leq \|\!|f|\!\|\|x\|$, inégalité valable aussi pour $x = 0$.

(b) Soit $x \in E$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que

$$(f(x)|f(x)) = (x|f^* \circ f(x)) \leq \|x\|\|f^* \circ f(x)\|$$

et on aussi

$$\|f^* \circ f(x)\| \leq \|\!|f^*|\!\|\|f(x)\|,$$

donc $\|f(x)\|^2 \leq \|\!|f^*|\!\|\|f(x)\|\|x\|$. Si $f(x) = 0$, l'inégalité est toujours vérifiée, si $f(x) \neq 0$, alors $\|f(x)\| \leq \|\!|f^*|\!\|\|x\|$.

(c) L'inégalité précédente montre que $\|\!|f|\!\| \leq \|\!|f^*|\!\|$ et par symétrie $\|\!|f^*|\!\| \leq \|\!|(f^*)^*|\!\| = \|\!|f|\!\|$, d'où $\|\!|f^*|\!\| = \|\!|f|\!\|$.

8. (a) On a d'une manière évidente $(f^* \circ f)^* = f^* \circ f$, donc $ff^* \in \mathscr{S}(E)$, et pour tout $x \in E$, $(x|f^* \circ f(x)) = \|f(x)\|^2 \geq 0$, d'où $ff^* \in \mathscr{S}^+(E)$.

(b) Il est clair que $e - f^* \circ f \in \mathscr{S}(E)$. Si de plus $f \in \mathscr{B}(E)$, alors $\|\!|f|\!\| \leq 1$ et donc pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$, mais

$$((e - f^* \circ f)(x)|x) = (x|x) - (f(x)|f(x)) = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2 \geq 0,$$

donc $e - f^* \circ f \in \mathscr{S}^+(E)$.
Réciproquement, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $e - f^* \circ f \in \mathscr{S}^+(E)$, alors pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 - \|f(x)\|^2 \geq 0$$

et donc $\|f(x)\| \leq \|x\|$, soit donc $\|\!|f|\!\| \leq 1$ et par conséquent $f \in \mathscr{B}(E)$.

9. (a) Soit $f \in \mathscr{B}(E)$, alors $\|\!|f|\!\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq 1$, mais $E_f \neq \{0\}$, alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que $\|f(x_0)\| = \|x_0\|$ et par conséquent $\|\!|f|\!\| = 1$.
Réciproquement, si $\|\!|f|\!\| = 1$ et comme la borne supérieure est atteinte, alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que $\dfrac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1$, donc E_f est non vide.

(b) Soit $x \in \ker(e - f^* \circ f)$, alors $f^* \circ f(x) = x$ et donc $(f^* \circ f(x)|x) = (x|x)$, c'est-à-dire

$$\|f(x)\|^2 = \|x\|^2,$$

donc $x \in E_f$.
Réciproquement, soit $x \in E_f$, alors $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ ou encore

$$(x|x) - (f^* \circ f(x)|x) = ((e - f^* \circ f)(x)|x) = 0,$$

alors d'après la question 5., $(e - f^* \circ f)(x) = 0$ et donc $x \in \ker(e - f^* \circ f)$. D'où l'égalité $E_f = \ker(e - f^* \circ f)$.
Le même raisonnement se fait pour montrer l'égalité $E_f^* = \ker(e - f \circ f^*)$.

(c) Soit $x \in E_f$, alors $f(x) - f \circ f^*(f(x)) = f(x - f^* \circ f(x)) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in E_f^*$, d'où $f(E_f) \subset E_f^*$.
D'autre part, soit $y \in E_f^*$, alors $y = f(f^*(y))$ et on a aussi

$$f^*(y) - f^*(f \circ f^*(y)) = f^*(y - f \circ f^*(y)) = f^*(0) = 0,$$

donc $y \in f(E_f))$. D'où $f(E_f) = E_f^*$.
Considérons maintenant l'application linéaire g, restriction de f à E_f :

$$g : E_f \to E_f^*$$

cette application est surjective par construction et si $x \in \ker g$, alors

$$\|g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 = \|x\|^2 = 0$$

et donc $x = 0$, l'application g est donc bijective et par conséquent $\dim(E_f) = \dim(E_f^*)$.

10. (a) Soient $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^* \circ f(f^k(x)) = f^k(x)$ et $f^* \circ f(f^k(y)) = f^k(y)$, donc

$$f^* \circ f(\lambda f^k(x) + \mu f^k(y)) = f^* \circ f(f^k(\lambda x + \mu y)) = \lambda f^k(x) + \mu f^k(y) = f^k(\lambda x + \mu y),$$

donc $\lambda x + \mu y \in F$ et par conséquent est un sous-espace vectoriel de E.
Autrement, $F = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} (f^k)^{-1}(E_f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit $x \in F$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f^{k+1}(x)\| = \|f^k(x)\|$, donc $f^k(x) \in E_f$ et ceci pour tout k, donc $f(F) \subset F$.
Si $x \in \ker f \cap F$, alors $\|f(x)\| = \|x\| = 0$, donc la restriction de f à F est bijective, donc $f(F) = F$.
Soit $x \in F$, $x \in E_f$, donc $F \subset E_f$, en utilisant les notations de la question 9.c, on a $f^*(F) = f^* \circ f(F)$, donc $f^*(F) = F$.

(c) $f^*(F) \subset F \Rightarrow f(G) \subset G$ (c'est de cours).

11.

i)$\Rightarrow$ii) Soit $f \in \mathscr{C}(E)$, alors $f \in \mathscr{B}(E)$ et $\mathrm{rg}(e - f^* \circ f) \leq 1$, donc si $\mathrm{rg}(e - f^* \circ f) = 0$, alors pour tout $x \in E$, $f^* \circ f(x) = x$, il suffit donc de prendre $u = 0$, si $\mathrm{rg}(e - f^* \circ f) = 1$, la question 6., montre qu'il existe un vecteur u non nul tel que $e - f^* \circ f = uu^*$.

ii)$\Rightarrow$iii) Pour tout $x \in E$, on peut écrire :

$$(x - f^* \circ f(x)|x) = (x|u)^2 = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2.$$

iii)$\Rightarrow$i) La relation $(x - f^* \circ f(x)|x) = (x|u)^2 = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2$, s'écrit encore $((e - f^* \circ f - f_u)(x)|x)$ et ceci pour tout $x \in E$, donc $e - f^* \circ f - f_u = 0$, donc $\mathrm{rg}(e - f^* \circ f) = \mathrm{rg}\, f_u \leq 1$ et pour tout $x \in E$ on a $\|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = (u|x)^2 \geq 0$ et donc $\|f(x)\| \leq \|x\|$ ou encore $\|\|f\|\| \leq 1$.

• • • • • • • • • •